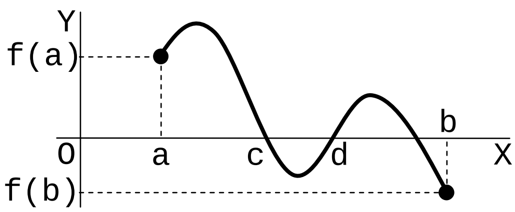
Índice: Teorema de Bolzano. Teorema de los valores intermedios (Propiedad de Darboux). Teorema de Weierstrass. Problemas.

1.- Teorema de Bolzano

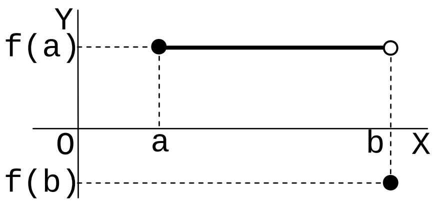
a) Enunciado: Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a,b] y f(a)·f(b)<0, entonces existe al menos un c en el intervalo abierto (a,b) tal que f(c)=0.

b) Significado geométrico: Si la función f es continua y cambia de signo, entonces su gráfica cortará necesariamente al eje de abscisas en al menos un punto entre a y b:



* * *

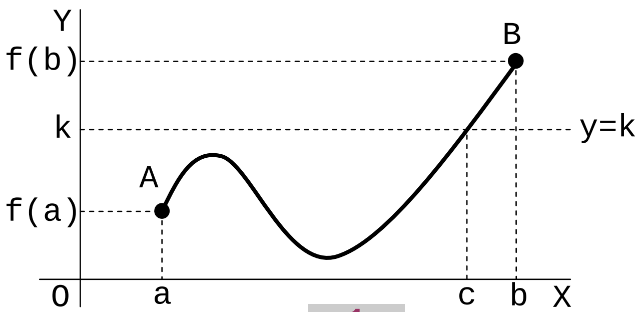
Es importante darse cuenta de que la función debe ser continua en el intervalo cerrado [a,b]. La siguiente función es continua en el intervalo [a,b) y su gráfica no corta al eje de abscisas:



2.- Teorema de los valores intermedios (Propiedad de Darboux)

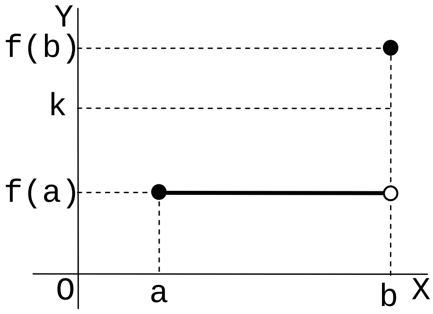
a) Enunciado: Si f es continua en el intervalo cerrado [a,b] y k es cualquier número comprendido entre f(a) y f(b), entonces existe algún c en el intervalo abierto (a,b) tal que f(c)=k.

b) Significado geométrico: Si la función es continua y su gráfica pasa del punto A al punto B, cortará necesariamente a la recta y=k en al menos un punto de abscisa comprendida entre a y b:



* * *

Es importante recalcar que la función debe ser continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. La siguiente función es continua en el intervalo $[a,b)$ y su gráfica no corta a la recta $y=k$:



* * *

Observa que si la función f cumple las condiciones de la propiedad de Darboux, entonces la función auxiliar $g(x)=f(x)-k$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano.

En efecto, si f es continua en $[a,b]$ y, por ejemplo, $f(a)<k<f(b)$, entonces g es continua[1] en $[a,b]$, $g(a)=f(a)-k<0$ y $g(b)=f(b)-k>0$.

Esto nos permite aplicar el teorema de Bolzano en lugar de la propiedad de Darboux.

* * *

Por ejemplo, dada la función $f(x)=x(1+\operatorname{sen} x)$, vamos a demostrar que existe $c\in(-\pi/2,\pi/2)$ tal que $f(c)=2$.

1º) Calculamos el valor de la función f en los extremos del intervalo:

- $f(-\pi/2)=-\pi/2\cdot[1+\operatorname{sen}(-\pi/2)]=-\pi/2\cdot(1-1)=(-\pi/2)\cdot 0=0<2$
- $f(\pi/2)=\pi/2\cdot[1+\operatorname{sen}(\pi/2)]=\pi/2\cdot(1+1)=(\pi/2)\cdot 2=\pi>2$

Por tanto, se cumple una de las dos condiciones de la propiedad de Darboux[2]: $f(-\pi/2)<2<f(\pi/2)$.

2º) Demostramos que la función f es continua[3] en $[-\pi/2,\pi/2]$:

- $[-\pi/2,\pi/2] \overset{4}{\subset} \operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Si $a\in[-\pi/2,\pi/2]$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}[x(1+\operatorname{sen} x)] = a(1+\operatorname{sen} a) = f(a)$$

Como la función f satisface las dos condiciones de la propiedad de Darboux, entonces existe c en $(-\pi/2,\pi/2)$ tal que $f(c)=2$.

[1] Por ser una resta de funciones continuas (k puede considerarse una función constante).
[2] Podría suceder que ambos valores fuesen mayores que 2, por ejemplo. En ese caso se prueba con el valor de la función en otros puntos del intervalo hasta conseguir que nos salga uno menor que 2.
[3] Si nos ha sucedido lo indicado en la nota anterior, el intervalo será distinto.
[4] Recuerda que para que una función sea continua en un punto, este debe pertenecer a su dominio.

* * *

Como hemos indicado más arriba, este problema también puede resolverse mediante el teorema de Bolzano utilizando la función auxiliar $g(x)=f(x)-2=x(1+\operatorname{sen} x)-2$.

1º) Calculamos el valor de la función g en los extremos del intervalo:

- $g(-\pi/2)=-\pi/2\cdot[1+\operatorname{sen}(-\pi/2)]-2=-\pi/2\cdot(1-1)-2=(-\pi/2)\cdot 0-2=0-2=-2<0$
- $g(\pi/2)=\pi/2\cdot[1+\operatorname{sen}(\pi/2)]-2=\pi/2\cdot(1+1)-2=(\pi/2)\cdot 2-2=\pi-2>0$

Por tanto, se cumple una de las dos condiciones del teorema de Bolzano[1]: $g(-\pi/2)\cdot g(\pi/2)<0$.

2º) Demostramos que la función g es continua[2] en $[-\pi/2,\pi/2]$:

- $[-\pi/2,\pi/2]\subset Dom(g)=Dom(f)=R$.
- Si $a\in[-\pi/2,\pi/2]$:

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}[x(1+\operatorname{sen} x)-2] = a(1+\operatorname{sen} a)-2 = g(a)$$

Como la función $g(x)=f(x)-2$ satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe c en $(-\pi/2,\pi/2)$ tal que $g(c)=0$.

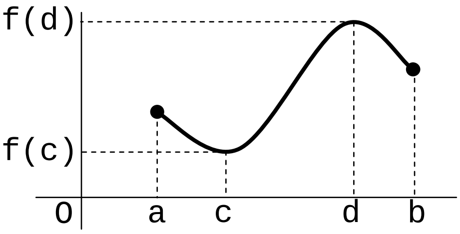
Ahora bien:

$$g(c)=0 \Rightarrow f(c)-2=0 \Rightarrow f(c)=2$$

3.- Teorema de Weierstrass

a) Enunciado: Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces alcanza en dicho intervalo al menos un máximo y un mínimo absolutos[3].

b) Significado geométrico: Si la función f es continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces existen c y d en dicho intervalo tales que: $f(c)\le f(x)\le f(d)\ \forall x\in[a,b]$:



* * *

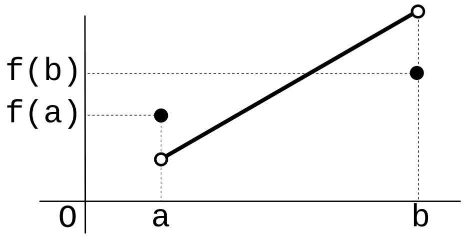
Igual que en los dos teoremas anteriores, la función debe ser con-

[1] Podría suceder que ambos valores fuesen del mismo signo. En ese caso se prueba con el valor de la función en otros puntos del intervalo hasta conseguir que nos salga uno de distinto signo.

[2] Si nos ha sucedido lo indicado en la nota anterior, el intervalo será distinto.

[3] La función f tiene un máximo absoluto en x_0 si $f(x)\le f(x_0)\ \forall x$. Del mismo modo, la función f tiene un mínimo absoluto en x_0 si $f(x)\ge f(x_0)\ \forall x$.

tinua en el intervalo cerrado [a,b]. La siguiente función es continua en el intervalo abierto (a,b) y no verifica el teorema:



* * *

Si nos piden calcular los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado, se procede de la siguiente manera:

1º) Calculamos los valores de f en los extremos del intervalo.

2º) Calculamos los valores de f en los extremos relativos[1] contenidos en el intervalo.

3º) Comparamos los valores obtenidos en los dos puntos anteriores, lo que nos permite establecer los extremos absolutos de la función.

4.- Problemas

1) Prueba mediante el teorema de Bolzano que las siguientes ecuaciones tienen alguna solución real y localízala[2]:

a) $2x^3-6x+1=0$ **b)** $3x^5-4x^2+3x+2=0$ **c)** $x^3-3x+1=0$

d) $4\cdot\operatorname{sen} x=3x$ **e)** $e^x+x=0$ **f)** $2\cdot\ln(1+x)=x$

2) Sea f la función definida en $[\pi/4,3\pi/4]$ y dada por:

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{si } x\neq\pi/2 \\ 1 & \text{si } x=\pi/2 \end{cases}$$

La función cumple $f(\pi/4)=1$ y $f(3\pi/4)=-1$. Sin embargo, cualquiera que sea x, $f(x)\neq 0$. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

3) Dada la función $f(x)=\cos(\pi x/2)-(\pi x/2)\cdot\operatorname{sen}(\pi x/2)$, demuestra que existe $\alpha\in(1,2)$ tal que $f(\alpha)=-2$.

4) Dada la función $f(x)=x\cdot\operatorname{sen}(\pi x/4)$, prueba que existe $\alpha\in(0,4)$ tal que $f(\alpha)=f(\alpha+1)$.

5) ¿Por qué tiene solución la ecuación $x^3-3x+8=0$? Demuestra que una ecuación polinómica de tercer grado tiene siempre solución.

6) Si f es una función continua y Dom(f)=Im(f)=[a,b], prueba que existe al menos un *punto fijo* c (que f(c)=c).

---

[1] Los extremos relativos de una función se estudian más adelante.
[2] Localizarla es encontrar un intervalo que la contenga.