Índice: Operaciones con límites. Límites de funciones potenciales. Expresiones indeterminadas. Transformación de expresiones indeterminadas. Problemas.

1.- Operaciones con límites

Si f y g son dos funciones y k es un número real, se cumplen las siguientes reglas[1]:

1ª) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

2ª) $\lim\limits_{x\to x_0}[k\cdot f(x)]=k\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

3ª) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

4ª) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$

5ª) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$

Los resultados de las operaciones que aparecen en los segundos miembros de estas cinco[2] reglas quedan recogidos en la *tabla de límites*[3]. Estos son de dos tipos: *límites determinados* y *límites indeterminados*.

El contenido de las cuadrículas que en esa tabla corresponden a los límites determinados son otros tantos teoremas que habría que demostrar, pero cuya demostración se sale del nivel de este curso. Nosotros los utilizaremos sin más. Las cuadrículas correspondientes a los límites indeterminados, que aparecen en blanco, se estudian más adelante en esta misma lección.

No es necesario retener el contenido de dicha tabla. La mayoría de los resultados son evidentes; y si surge alguna duda, se puede solventar con la calculadora. Así, si en el cálculo de un límite se llega a la expresión $0^{-\infty}$, bastará considerar qué pasa si tomamos un número "pequeño" y positivo[4], 1/10 por ejemplo, y lo elevamos a uno "grande" y negativo, -10 por ejemplo: $(1/10)^{-10}=(10^{-1})^{-10}=10^{10}$. Esto nos sugiere que el límite es $+\infty$.

---

[1] Reglas que son ciertas tanto si x_0 es un número real como si es $+\infty$ o $-\infty$, y que también se cumplen cuando se trata de límites laterales.
[2] Que se reducen a cuatro, ya que la segunda es un caso particular de la tercera, aquel en el que el primer factor es una función constante.
[3] Ver "Resúmenes" en este mismo blog. Si prefieres construirla por tu cuenta como se indica al final de este apartado, la tienes en blanco allí mismo en el ejercicio 2.3.
[4] Recuerda que la base de una función potencial-exponencial debe ser positiva.

2.- Límites de funciones potenciales

Si $n\in\mathbb{N}^*$, como $[f(x)]^n$ es el producto de $f(x)$ por sí misma n veces, los límites de este tipo de funciones se rigen por la 3ª regla vista en el apartado anterior y por la tabla correspondiente. Especificamos aquí su tabla[1]:

	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$				
	$-\infty$	$L<0$	0	$0<L$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n$	$\pm\infty$	L^n	0	L^n	$+\infty$

El doble signo de la cuadrícula señalada depende, claro está, de si n es par o impar.

* * *

Como $\sqrt[n]{f(x)}=[f(x)]^{1/n}$, los límites de este tipo de funciones se rigen por la 5ª regla vista en el apartado anterior. Su tabla es la siguiente[1]:

	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$				
	$-\infty$	$L<0$	0	$0<L$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)}$	$-\infty$	$\sqrt[n]{L}$	0	$\sqrt[n]{L}$	$+\infty$

Las dos últimas casillas, marcadas en verde, y la central cuando $f(x)>0$ son casos particulares de la 5ª regla. Así, por ejemplo, la última casilla:

$$\sqrt[n]{+\infty} = (+\infty)^{1/n} \overset{2}{=} +\infty$$

Sin embargo, las dos primeras casillas, marcadas en amarillo, y la central cuando $f(x)<0$, que solo pueden presentarse cuando el índice es impar y el radicando negativo, son una consecuencia de las tres últimas[3].

Veamos, por ejemplo, la primera (las otras se prueban igual).

Supongamos que n sea impar y que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$. En ese caso:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \overset{4}{\Rightarrow} \lim_{x\to x_0} [-f(x)]=+\infty \overset{5}{\Rightarrow} \lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{-f(x)}=+\infty \overset{6}{\Rightarrow} \lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)}=-\infty$$

[1] Como los límites de este tipo de funciones son muy frecuentes es más cómodo aplicar directamente la tabla que aquí presentamos.
[2] Ya que 1/n>0 (ver la tabla de los límites de las funciones potencial-exponenciales).
[3] No pueden deducirse directamente de la tabla de la función potencial-exponencial porque la base de esta función es siempre positiva.
[4] Ya que f(x) y –f(x) son funciones opuestas y, por tanto, sus gráficas son simétricas respecto del eje de abscisas.
[5] Aplicamos la última casilla de la tabla, que acabamos de demostrar.
[6] Como n es impar, se trata como antes de funciones opuestas.

3.- Expresiones indeterminadas

Cuando en el cálculo de un límite aparece una indeterminación ello significa que no sabemos todavía si ese límite existe o no, y, si existe, cuánto vale. Como veremos más adelante, habrá que proceder de determinada manera, según sea la indeterminación, para hacerla desaparecer.

Las indeterminaciones se reducen a 8 tipos distintos:

Suma y diferencia	$\infty-\infty$		
Producto	$0\cdot\infty$		
Cociente	∞/∞	$L/0$	$0/0$
Potencia	$1^{\pm\infty}$	0^0	$(+\infty)^0$

La indeterminación $L/0$, donde L es $+\infty$, $-\infty$ o un número real distinto de cero, lo es solo en el sentido de que, si existe el límite, este es $+\infty$ o $-\infty$ (de allí la indeterminación).

Es fundamental conocer las expresiones indeterminadas sin ningún titubeo, pues esto nos evita la necesidad de tener que memorizar la tabla de límites, pues todo lo que no sea una expresión indeterminada puede conocerse, como hemos indicado en el primer apartado, mediante el uso de la calculadora.

4.- Transformación de expresiones indeterminadas

Todas las indeterminaciones[1] se pueden reducir a $0/0$ o ∞/∞:

Expresión indeterminada	Transformación
$f-g \to \infty-\infty$	$f-g \overset{2}{=} f\cdot\left(1-\frac{g}{f}\right) \overset{3}{\to} \infty\cdot\left(1-\frac{\infty}{\infty}\right)$
$f\cdot g \to 0\cdot\infty$	$f\cdot g = \frac{f}{1/g} \to \frac{0}{1/\infty} \overset{4}{=} \frac{0}{0}$ $f\cdot g = \frac{g}{1/f} \to \frac{\infty}{1/0} \overset{5}{=} \frac{\infty}{\pm\infty}$
$f^g \to 1^{\pm\infty}$	$f^g = e^{g\cdot\ln f} \overset{6}{\to} e^{\pm\infty\cdot 0}$
$f^g \to 0^0$	$f^g = e^{g\cdot\ln f} \overset{6}{\to} e^{0\cdot(-\infty)}$
$f^g \to (+\infty)^0$	$f^g = e^{g\cdot\ln f} \overset{6}{\to} e^{0\cdot(+\infty)}$

[1] Excepto $L/0$, que es fácil de eliminar como veremos.
[2] En principio da igual sacar factor común f que g. En la lección siguiente veremos que no siempre es así.
[3] En el caso de que $g/f\to1$, aparece la indeterminación $0\cdot\infty$.
[4] Aplicamos la tabla de límites.
[5] En el supuesto de que exista el límite de $1/f$.
[6] Esto se demostrará más adelante.

La mayoría de estas transformaciones se utilizarán cuando se haya visto la regla de L'Hôpital.

5.- Problemas

1) Demuestra la fórmula $f^g=e^{g\cdot \ln f}$.

2) Prueba que la función $y=x^{k/\ln x}$ es constante y calcula su dominio.

3) Indica el valor de los siguientes límites determinados:

a) $3^{-\infty}$ **b)** $0^{+\infty}$ **c)** $(1/2)^{-\infty}$ **d)** $(1/2)^{+\infty}$

4) Indica el valor de los siguientes límites determinados:

a) $(-\infty)^5$ **b)** $(-3)^2$ **c)** 0^8 **d)** $(+\infty)^{12}$

e) $\sqrt[5]{-\infty}$ **f)** $\sqrt[3]{-27}$ **g)** $\sqrt[5]{0}$ **h)** $\sqrt[4]{+\infty}$

5) Sean f y g dos funciones tales que el límite de f en $+\infty$ es $+\infty$, mientras que el límite de g en $+\infty$ no existe. La función g está acotada inferiormente por 3, esto es, $3\leq g(x)\ \forall x$. Indica justificadamente[1] el valor del límite en $+\infty$ de las siguientes funciones, en el caso de que esté determinado:

a) $f(x)+g(x)$ **b)** $f(x)-g(x)$ **c)** $g(x)-f(x)$ **d)** $f(x)\cdot g(x)$

6) Sean f y g dos funciones tales que el límite de f en $+\infty$ es $+\infty$, mientras que el límite de g en $+\infty$ no existe. La función g está acotada superiormente por -3, esto es, $g(x)\leq -3\ \forall x$. Indica justificadamente[1] el valor del límite en $+\infty$ de las siguientes funciones, en el caso de que esté determinado:

a) $f(x)+g(x)$ **b)** $f(x)-g(x)$ **c)** $g(x)-f(x)$ **d)** $f(x)\cdot g(x)$

[1] Recuerda la regla del sandwich.