*Índice: Límite de una función en un punto. Relación entre el límite y los límites laterales. Problemas.*

## 1.- Límite de una función en un punto

Consideremos ahora todas las sucesiones $x_1$, $x_2$, $x_3$,… contenidas en Dom(f), que tienden a $x_0$ *y cuyos términos son distintos*[1] *de* $x_0$. ¿Qué sucede con las sucesiones $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$,…?

Para no repetirnos, damos directamente el esquema final:

| Casos | Caracterización |
| --- | --- |
| No tiene sentido plantear el límite de la función f en $x_0$ | Si Dom(f) no contiene ninguna sucesión que tiende a $x_0$ y cuyos términos son distintos de $x_0$ |
| El límite de la función f en $x_0$ es L | Si la función f transforma todas las sucesiones contenidas en Dom(f), que tienden a $x_0$ y cuyos términos son distintos de $x_0$ en sucesiones que tienden a L |
| No existe el límite de la función f en $x_0$ | Si la función f no transforma todas las sucesiones contenidas en Dom(f), que tienden a $x_0$ y cuyos términos son distintos de $x_0$ en sucesiones que tienen el mismo límite |

Que el límite de la función f en $x_0$ es L (L puede ser un número real, +∞ o -∞) lo indicaremos así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=L$$

## 2.- Relación entre el límite y los límites laterales

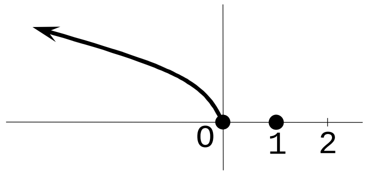
Establezcamos en una tabla de doble entrada los distintos casos que pueden presentarse. En ella, tanto L como M pueden ser un número real, +∞ o -∞:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">El límite de f en $x_0$</td><th colspan="3">El límite lateral derecho de f en $x_0$</th></tr>
<tr><th>No tiene sentido plantearlo</th><th>Es M</th><th>No existe</th></tr>
<tr><th rowspan="3">El límite lateral izquierdo de f en $x_0$</th><th>No tiene sentido plantearlo</th><td>1 No tiene sentido plantearlo</td><td>4 Es M</td><td>7 No existe</td></tr>
<tr><th>Es L</th><td>2 Es L</td><td>5 Es L o No existe</td><td>8 No existe</td></tr>
<tr><th>No existe</th><td>3 No existe</td><td>6 No existe</td><td>9 No existe</td></tr>
</table>

[1] No nos interesa lo que pase en $x_0$.

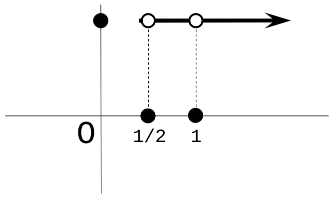
El caso **1** se presenta en puntos tales como x=1 o x=2 de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & \text{si} \quad x\le 0\\ 0 & \text{si} \quad x=1\end{cases}$$




Los casos **3**, **6**, **7**, **8** y **9** son similares: si al menos uno de los límites laterales no existe, entonces no existe el límite.

Consideremos, por ejemplo, el caso **7**. La gráfica que aparece dibujada a continuación es la de una función que ya hemos utilizado en la lección anterior, pero restringida[1] ahora al intervalo $[0,+\infty)$:

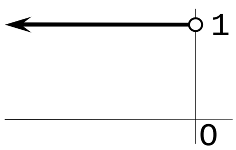



Evidentemente, no existe el límite de esta función en 0 por las mismas razones que no existe el límite lateral derecho, pues las sucesiones contenidas en su dominio, que tienden a 0 y cuyos términos son distintos de 0 son las mismas que tienen sus términos mayores que 0:

| Dom(f) | Im(f) |
|---|---|
| 1 | f(1)=0 |
| 1/2 | f(1/2)=0 |
| 1/3 | f(1/3)=0 |
| … | … |
| ↓ | ↓ |
| 0 | 0 |

| Dom(f) | Im(f) |
|---|---|
| 3/10 | f(3/10)=1 |
| 3/100 | f(3/100)=1 |
| 3/1000 | f(3/1000)=1 |
| … | … |
| ↓ | ↓ |
| 0 | 1 |

La función f(x)=1 restringida al intervalo $(-\infty,0)$ ejemplifica el caso **2** (el **4** es similar):




El límite de esta función en 0 es 1 por las mismas razones que es 1 su límite lateral izquierdo, ya que las sucesiones contenidas en su dominio, que tienden a 0 y cuyos términos son distintos de 0 son

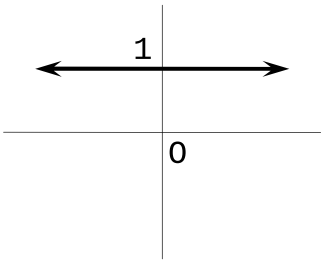
[1] Recuerda el concepto de “restricción” visto en la lección 2.

las mismas que tienen sus términos menores que 0:

| Dom(f) | Im(f) |
|---|---|
| $x_1 \neq 0$ | $f(x_1)=1$ |
| $x_2 \neq 0$ | $f(x_2)=1$ |
| $x_3 \neq 0$ | $f(x_3)=1$ |
| … | … |
| ↓ | ↓ |
| 0 | 1 |

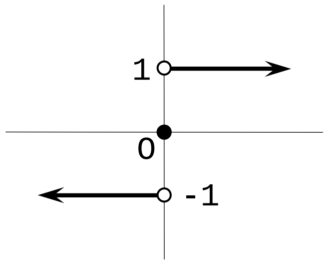
Por último, el caso **5** presenta una doble posibilidad.

- Si L=M, entonces el límite es L (o M). Por ejemplo, los límites laterales de la función f(x)=1 en x=0 coinciden con el límite de esa función en ese punto:




- Si L≠M, la función signo nos ilustra el caso:

$$Sig(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ 1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$




Evidentemente, no existe el límite de f en 0:

| Dom(f) | Im(f) |
|---|---|
| -1 | f(-1)=-1 |
| -1/2 | f(-1/2)=-1 |
| -1/3 | f(-1/3)=-1 |
| … | … |
| ↓ | ↓ |
| 0 | -1 |

| Dom(f) | Im(f) |
|---|---|
| 1 | f(1)=1 |
| 1/2 | f(1/2)=1 |
| 1/3 | f(1/3)=1 |
| … | … |
| ↓ | ↓ |
| 0 | 1 |

## 3.- Problemas

**1)** Prueba con la definición que el límite de f(x)=k en $x_0$ es k.

**2)** Prueba con la definición que el límite de f(x)=x en $x_0$ es $x_0$.

**3)** Rellena la siguiente tabla con el valor del límite que corresponda en cada caso o indica que no existe o que no tiene sentido plantearlo. Pon ejemplos que lo ilustren:

| El límite de f en $x_0$ | | El límite lateral derecho de f en $x_0$ es | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $-\infty$ | M | $+\infty$ |
| El límite lateral izquierdo de f en $x_0$ es | $-\infty$ | | | |
| | L | | | |
| | $+\infty$ | | | |

**4)** Completa el estudio iniciado en el apartado 2 de esta lección con ejemplos de funciones para los casos **3**, **4**, **6**, **8** y **9**.

**5)** Dibuja la gráfica de una función que verifica los límites indicados en los siguientes casos:

**a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

**b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

**c)** $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=-\infty$.

**d)** $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-1$ y $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=3$.

**6)** Si el límite de una función en $x_0$ es L, ¿qué límites conoces de su simétrica respecto del eje de abscisas, de su simétrica respecto del eje de ordenadas y de su simétrica respecto del origen de coordenadas?

**7)** Dibuja la gráfica de una función que verifique lo siguiente: el límite en $-\infty$ es $+\infty$, el límite en -3 es $+\infty$, el límite lateral izquierdo en -2 es 0, el límite en -1 es $+\infty$, el límite en 2 es 1, el límite en 3 es $-\infty$ y el límite en $+\infty$ es 0.

**8)** Sean f, g y h tres funciones[1] tales que $f(x)\leq g(x)\leq h(x)\ \forall x$. Si el límite de f en $x_0$ es el número real L y también el de h es L, ¿cuánto vale el de g? Justifícalo gráficamente.

**9)** Sean f y g dos funciones[1] tales que $f(x)\leq g(x)\ \forall x$. Si el límite de f en $x_0$ es $+\infty$, ¿cuál es el de g? Y si el limite de g en $x_0$ es $-\infty$, ¿cuál es el de f? Justifícalo gráficamente.

[1] Vuelve a aparecer aquí la regla del sandwich.