Índice: Funciones. Límite de una función en +∞. Límite de una función en -∞. Problemas.

1.- Funciones

Recordemos que una *función* f queda determinada si se conoce su *regla de transformación*[1] y su *dominio de definición*[2]:

$$f \equiv \begin{cases} f(x)=\ldots \\ \mathrm{Dom}(f)=\ldots \end{cases}$$

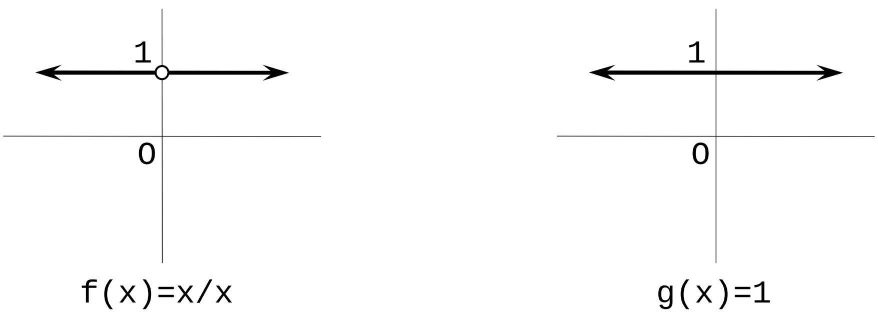
Por tanto, dos funciones f y g son iguales si tienen la misma regla de transformación y el mismo dominio:

$$f=g \iff \begin{cases} f(x)=g(x) \\ \mathrm{Dom}(f)=\mathrm{Dom}(g) \end{cases}$$

Si dos funciones f y g tienen la misma regla de transformación y $\mathrm{Dom}(f)\overset{3}{\subset}\mathrm{Dom}(g)$, se dice que f es una *restricción* de g o que g es una *extensión* de f. Así, la función f(x)=x/x es una restricción de la función g(x)=1 (o g una extensión de f), ya que se comportan igual y Dom(f)=R-{0} y Dom(g)=R.

Se llama *gráfica* de f, y se denota por Gráf(f), al conjunto de puntos (x,y) tales que x∈Dom(f) e y=f(x).

Por ejemplo, las gráficas de las funciones mencionadas en el párrafo anterior son:



2.- Límite de una función en +∞

Nos proponemos estudiar el comportamiento de una función f en +∞. Dicho de otro modo, cuando la variable x toma valores cada vez más

[1] Dicha regla transforma cada valor de x (la variable independiente) en un único valor de y (la variable dependiente): f(x)=y.
[2] Conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente. Se denota por Dom(f). Cuando no se especifique el dominio de una función cuya regla de transformación se nos da, se supondrá definida en su *dominio máximo*, es decir, allí donde dicha regla tenga sentido. Por ejemplo, el dominio de f(x)=x², sin más datos, es R (los números reales).
[3] Este símbolo se lee “está contenido en” o “es un subconjunto de”.

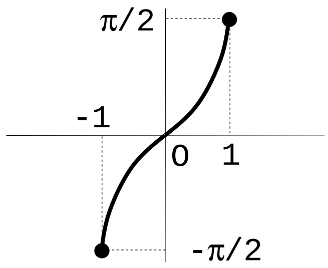
grandes y tan grandes como queramos, esto es, cuando x *tiende* a $+\infty$, ¿qué sucede con la variable y?, ¿a qué *tiende*? Vamos a estudiar esas tendencias utilizando sucesiones.

Si x_1, x_2, x_3,… es una sucesión contenida en Dom(f), es evidente que la sucesión $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$,… está contenida[1] en Im(f).

Pues bien, consideremos todas las sucesiones x_1, x_2, x_3,… contenidas en Dom(f) que tienden a $+\infty$. ¿Qué sucede con las sucesiones $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$,…?

Veamos los distintos casos posibles con algunos ejemplos sencillos.

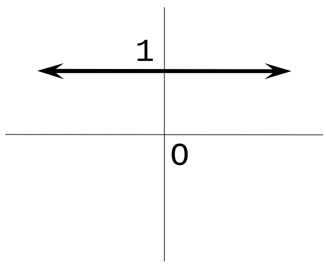
1º) Hay funciones cuyo dominio no contiene ninguna sucesión que tienda a $+\infty$. La función $f(x)=\operatorname{arc\,sen} x$ es un ejemplo:



En estos casos diremos que *no tiene sentido plantear el límite de la función en* $+\infty$.

2º) La función $f(x)=1$ transforma todas las sucesiones contenidas en su dominio que tienden a $+\infty$ en sucesiones que tienden a 1:

Dom(f)	Im(f)
x_1	$f(x_1)=1$
x_2	$f(x_2)=1$
x_3	$f(x_3)=1$
…	…
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	1



En este caso diremos que *el límite de la función f en* $+\infty$ *es 1*, y lo indicaremos[2] así:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

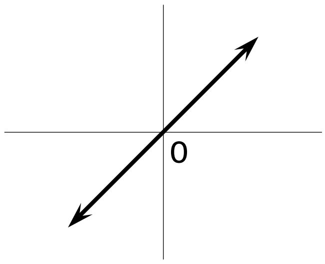
3º) La función $f(x)=x$ transforma todas las sucesiones contenidas en su dominio que tienden a $+\infty$ en sucesiones que tienden a $+\infty$:

---

[1] La *imagen de la función* f, que se denota por Im(f), es el conjunto de los valores que toma la variable dependiente. Dada la función f, esto es, dada su regla de transformación y su dominio, el conjunto Im(f) queda determinado. Así, la función $f(x)=x^2$ con $\mathrm{Dom}(f)=(2,3]$ tiene por imagen $\mathrm{Im}(f)=(4,9]$.

[2] Observa que esta notación recoge de alguna manera la información más relevante: el símbolo $x\to+\infty$ se refiere a las sucesiones (x_n) que tienden a $+\infty$; y la expresión $\lim f(x)=1$ indica que entonces las sucesiones $(f(x_n))$ tienden a 1.

Dom(f)	Im(f)
x_1	$f(x_1)=x_1$
x_2	$f(x_2)=x_2$
x_3	$f(x_3)=x_3$
…	…
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	$+\infty$

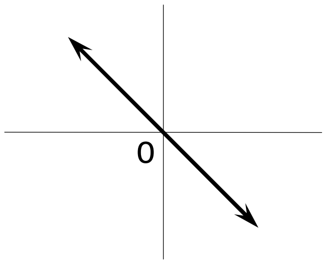


En este caso diremos que *el límite de la función f en +∞ es +∞*, y lo indicaremos así:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

4º) La función $f(x)=-x$ transforma todas las sucesiones contenidas en su dominio que tienden a $+\infty$ en sucesiones que tienden a $-\infty$:

Dom(f)	Im(f)
x_1	$f(x_1)=-x_1$
x_2	$f(x_2)=-x_2$
x_3	$f(x_3)=-x_3$
…	…
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	$-\infty$

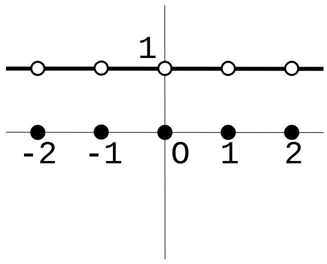


En este caso diremos que *el límite de la función f en +∞ es -∞*, y lo indicaremos así:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

5º) Por último, la siguiente función no transforma todas las sucesiones contenidas en su dominio que tienden a $+\infty$ en sucesiones que tienen el mismo límite (Z es el conjunto de los números enteros):

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in Z \\ 1 & \text{si } x\notin Z \end{cases}$$



En efecto:

Dom(f)	Im(f)
1	$f(1)=0$
2	$f(2)=0$
3	$f(3)=0$
…	…
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	0

Dom(f)	Im(f)
1,5	$f(1,5)=1$
2,5	$f(2,5)=1$
3,5	$f(3,5)=1$
…	…
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	1

O si se prefiere:

Dom(f)	Im(f)
1	f(1)=0
1,5	f(1,5)=1
2	f(2)=0
2,5	f(2,5)=1
…	…
↓	↓
+∞	oscilante

En este caso diremos que *no existe el límite de la función en* +∞.

* * *

Resumiendo, vemos que solo se pueden presentar tres casos:

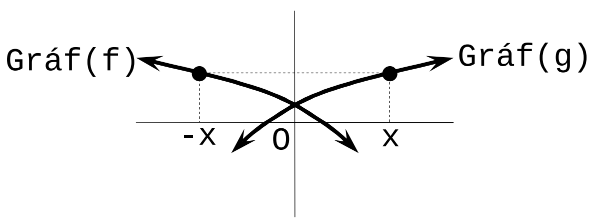
Casos	Caracterización
No tiene sentido plantear el límite de f en +∞	Si Dom(f) no contiene ninguna sucesión que tienda a +∞
El límite de f en +∞ es L	Si la función f transforma todas las sucesiones contenidas en Dom(f) que tienden a +∞ en sucesiones que tienden a L
No existe el límite de f en +∞	Si la función f no transforma todas las sucesiones contenidas en Dom(f) que tienden a +∞ en sucesiones que tienen el mismo límite

En la segunda línea de la tabla, que aparece remarcada, se establece la definición de límite de una función f en +∞. Como hemos visto en los ejemplos, L puede ser un número real, +∞ o -∞.

3.- Límite de una función en -∞

Las mismas consideraciones pueden hacerse en -∞, pero no merece la pena repetirlas. Tan solo interesa una cuestión de interés práctico.

Si las funciones f y g son simétricas respecto del eje OY, es evidente que g(x)=f(-x):



Resulta entonces que el límite de la función f en -∞ coincide con el límite de la función g en +∞. Y como g(x)=f(-x), puede utilizarse la siguiente fórmula:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

4.- Problemas

1) Define límite de una función en $-\infty$.

2) Prueba que el límite de $f(x)=k$, tanto en $+\infty$ como en $-\infty$, es k.

3) Prueba que el límite de $f(x)=x$ en $+\infty$ es $+\infty$; y en $-\infty$, $-\infty$.

4) Da un ejemplo de función que no tenga[1] límite en $+\infty$.

5) Demuestra que las funciones sen, cos, tg, cosec, sec y ctg no tienen límite en el infinito.

6) En los siguientes casos, ¿tiene sentido plantear el limite de la función f en $-\infty$?:

a) $f(x)=\ln x$ **b)** $f(x)=\operatorname{arc\,sen} x$

c) $f(x)=\arccos x$ **d)** $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{1-x}$

e) $f(x)=\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x+1}{x-1}$ **f)** $f(x)=\sqrt{x^3+x-2}$

7) Dibuja la gráfica de una función que verifique los límites indicados:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

8) A la vista de sus gráficas (o con la calculadora) indica los límites en el infinito ($\pm\infty$) de las siguientes funciones:

a) $y=\ln x$ **b)** $y=e^x$ **c)** $y=\operatorname{arc\,cosec} x$ **d)** $(1/3)^x$

e) $y=\operatorname{arc\,sec} x$ **f)** $y=\operatorname{arc\,tg} x$ **g)** $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ **h)** $\log_{1/3}x$

9) Si $f(x)>0\ \forall x$, ¿puede ser negativo el límite de f en $+\infty$? ¿Y 0?

10) Sean f, g y h tres funciones[2] tales que $f(x)\le g(x)\le h(x)\ \forall x$. Si el límite de f en $+\infty$ es el número real L y el de h también es L, ¿cuál es el de g? Justifícalo gráficamente.

11) Sean f y g dos funciones[3] tales que $f(x)\le g(x)\ \forall x$. Si el límite de f en $+\infty$ es $+\infty$, ¿cuál es el de g? Y si el de g en $+\infty$ es $-\infty$, ¿cuál es el de f? Justifícalo gráficamente.

---

[1] Que no exista.
[2] Esta es la *regla del sandwich*.
[3] Esta propiedad es un caso especial de la regla del sandwich.