

Índice: Límite de la composición de funciones. Cálculo de límites por cambio de variable. Problemas.

### 1.- Límite de la composición de funciones

Recordemos que la función  $g \circ f$  ( $f$  compuesta con  $g$ ) se define como sigue:

$$g \circ f \equiv \begin{cases} g \circ f(x) = g(f(x)) \\ \text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \in \text{Dom}(g)\} \end{cases}$$

\* \* \*

Para calcular el límite de la composición de dos funciones nos atendremos a la siguiente regla<sup>1</sup>, que no demostraremos:

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ , se puede dar el siguiente paso (que consiste en hacer el cambio de variable  $f(x) = y$ ):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$$

Para poder aplicar esta regla se tiene que verificar una de las tres condiciones siguientes:

1ª)  $y_0$  es  $+\infty$  o  $-\infty$ .

2ª)  $g$  es continua<sup>2</sup> en  $y_0$ .

3ª)  $f(x) \neq y_0$  en un entorno reducido<sup>3</sup> de  $x_0$ .

**NOTA:** Si se cumple la segunda condición, esto es, si  $g$  es continua en  $y_0$ , la fórmula anterior puede, evidentemente, escribirse así:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0) \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)$$

Por ejemplo, calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arctg \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$

Observa que en este caso  $x_0 = 1$ ,  $g = \arctg$  y  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ .

El procedimiento que se sigue es el siguiente:

1º) Calculamos  $y_0$ :

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \stackrel{4}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}}{(x-1) \cdot \sqrt{x-1}} =$$

<sup>1</sup> Regla que es cierta tanto si  $x_0$  es un número real como si es  $+\infty$  o  $-\infty$ , y que también se cumple cuando se trata de límites laterales.

<sup>2</sup> Recuerda la definición de función continua en un punto vista el curso pasado.

<sup>3</sup> Un entorno reducido es un entorno sin el centro. Esta condición se refiere solo a valores de  $x$  que pertenecen al dominio de la función  $g \circ f$ .

<sup>4</sup> Ya que el dominio de la función es  $(1, +\infty)$ .

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x-1}{(x-1) \cdot \sqrt{x-1}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = +\infty$$

2º) Como se cumple la primera condición, aplicamos la regla, esto es, hacemos el cambio de variable  $f(x)=y$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arctg \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctg y \stackrel{1}{=} \pi/2$$

Veamos otro ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x}$$

Como en el ejemplo anterior, observamos que en este caso  $x_0=0$ ,  $g=\ln$  y  $f(x)=(1+x)^{1/x}$ .

1º) Calculamos  $y_0$ :

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \stackrel{2}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \cdot (1+x-1) \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} 1} = e^1 = e$$

2º) Como se cumple la segunda condición, ya que  $g=\ln$  es continua en  $e$ , aplicamos la regla, esto es, hacemos el cambio de variable  $f(x)=y$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \lim_{y \rightarrow e} \ln y = \ln e = 1$$

Veamos un ejemplo más:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x^2+1}$$

Antes de nada, observa que en este caso  $x_0=+\infty$ ,  $g=\ln$  y  $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ .

1º) Calculamos  $y_0$ :

$$\begin{aligned} y_0 &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \\ &= \frac{1}{+\infty \cdot (1+0)} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

2º) Como se cumple la tercera condición, ya que  $f(x)=x/(x^2+1)$  es distinto de  $y_0=0$  en un entorno de  $+\infty$ , en  $(0, +\infty)$  por ejemplo, aplicamos la regla, esto es, hacemos el cambio  $f(x)=y$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x^2+1} \stackrel{3}{=} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \ln y = -\infty$$

<sup>1</sup> Recuerda la gráfica de la función arco tangente. Si no la recuerdas del todo, la calculadora (en radianes) puede sacarte de apuros:  $\arctg 100=1,56\dots$  y  $\pi/2=1,57\dots$  Y si uno no es demasiado escrupuloso, también puede razonar así:  $\arctg(+\infty)=z \Leftrightarrow \operatorname{tg} z=+\infty \Leftrightarrow z=\pi/2$ .

<sup>2</sup> Ya que sale la indeterminación  $1^\pm \infty$ .

<sup>3</sup> Observa que  $y_0=0^+$ .

Si el límite de  $f(x)$  en  $x_0$  es inmediato, se procede directamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x^2 + \pi) = \sin(0^2 + \pi) = \sin \pi = 0$$

## 2.- Cálculo de límites por cambio de variable

Veamos ahora una propiedad que tampoco vamos a demostrar y que nos va a permitir el cálculo de algunos límites<sup>1</sup>:

Si  $f$  es una función inyectiva<sup>2</sup> y  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{-1}(x) = y_0$ , se puede dar el siguiente paso (que consiste en hacer el cambio de variable<sup>3</sup>  $x = f(y)$ ):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(f(y))$$

Veamos un ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8}$$

1º) Buscamos el cambio de variable  $x = f(y)$ . En este caso, con el fin de eliminar ambas raíces, el cambio apropiado es  $x = y^6$ .

2º) Calculamos  $y = f^{-1}(x)$ , esto es, la recíproca<sup>4</sup> de la función anterior, que en este caso es  $y = \sqrt[6]{x}$ .

3º) Hallamos  $y_0$ :

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 64} \sqrt[6]{x} = 2$$

4º) Aplicamos la regla:

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 - 4}{y^3 - 8} \stackrel{5}{=} \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y-2)(y+2)}{(y-2)(y^2+2y+4)} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y+2}{y^2+2y+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

## 3.- Problemas

**1)** Si al calcular el límite de una función potencial-exponencial  $f^g$  sale una de las expresiones indeterminadas  $1^{\pm\infty}$ ,  $0^0$  y  $(+\infty)^0$ , se aplica la fórmula  $f^g = e^{g \cdot \ln f}$ . Demuestra, calculando el límite de  $g \cdot \ln f$ , que

<sup>1</sup> Propiedad que es cierta tanto si  $x_0$  es un número real como si es  $+\infty$  o  $-\infty$ , y que también se cumple cuando se trata de límites laterales.

<sup>2</sup> Recuerda que para que una función tenga *recíproca* debe ser inyectiva. Lo que significa que las rectas horizontales cortan a su gráfica como mucho en un punto. La recíproca de  $f$  se denota por  $f^{-1}$ .

<sup>3</sup> Recuerda que si  $x = f(y)$  es inyectiva, entonces su recíproca es  $y = f^{-1}(x)$ .

<sup>4</sup> Observa que la función  $x = y^6$  no es inyectiva en su dominio máximo, pero sí en  $(0, +\infty)$ .

<sup>5</sup> Descomponemos los dos polinomios por Ruffini.

los tres casos se reducen a la indeterminación  $0 \cdot \infty$ . Indica en cada uno de ellos la condición que se verifica al calcular el límite de la función compuesta  $\ln f$ .

**2)** Calcula los siguientes límites. Si utilizas el límite de la composición, indica la condición que se cumple en cada caso:

|                                                                                            |                                                                                    |                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>a)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg \left( \frac{1+x}{x^2} \right)^{-x}$        | <b>b)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left( \frac{x}{2x+7} \right)^x$      | <b>c)</b> $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(4^x - 5^x)$                              |
| <b>d)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+\ln x^x}{\ln x}$                       | <b>e)</b> $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \operatorname{ctg}(\pi x)$   | <b>f)</b> $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{3x+2}{2x^2+1}$                     |
| <b>g)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty}  \sqrt{x-\sqrt{x}} - \sqrt{x+\sqrt{x}} $           | <b>h)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+e^{-x}}{x}$                    | <b>i)</b> $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x > \pi/2}} \operatorname{ctg}(2x)$ |
| <b>j)</b> $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x^2 - \pi x}{2x}$                             | <b>k)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\ln x)^{1-x}$                      | <b>l)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{x^3}$     |
| <b>m)</b> $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \operatorname{tg} \frac{\pi-x}{x+2}$ | <b>n)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - \sqrt[3]{x^2-5})$                  | <b>ñ)</b> $\lim_{x \rightarrow 0} \arctg \frac{1}{x}$                                 |
| <b>o)</b> $\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$                                       | <b>p)</b> $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arccosec} \frac{\sqrt{x^2-3x}}{x}$ | <b>q)</b> $\lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{x}$                    |

**3)** Calcula los siguientes límites. Si utilizas el límite de la composición, indica la condición que se cumple en cada caso:

|                                                                                                 |                                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>a)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x^3 - \ln(x+7)]$                                   | <b>b)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccctg} x^{3+\sin x}$               |
| <b>c)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{\ln x}$                                 | <b>d)</b> $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arcsec}(\ln x)^{1/(1-x)}$                  |
| <b>e)</b> $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} \frac{x-\pi}{\operatorname{tg}(x/2)}$ | <b>f)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x[\ln(x-3) - 2 \cdot \ln x])$                     |
| <b>g)</b> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2-x)}{1-x}$                                       | <b>h)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(5+\cos x)^x$                                   |
| <b>i)</b> $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcsec}(\sqrt{4x^2-x}+x)$                 | <b>j)</b> $\lim_{x \rightarrow 4} \operatorname{arccosec} \frac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x}-2}$ |

**4)** Calcula, mediante un cambio de variable adecuado:

|                                                                            |                                                                              |                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| <b>a)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ | <b>b)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 8e^{2x}}{e^x + 4e^{2x}}$ | <b>c)</b> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x}$          |
| <b>d)</b> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[4]{x}}{1-x}$             | <b>e)</b> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1-x}$               | <b>f)</b> $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1}$ |