Índice: Cálculo de límites en un punto. Expresión indeterminada L/0. Expresión indeterminada 0/0. Algunos límites de funciones irracionales. Otras técnicas básicas para el cálculo de límites. Problemas.

1.- Cálculo de límites en un punto

El cálculo de estos límites se reduce a aplicar sistemáticamente las reglas enunciadas en el apartado 1 de la lección 5, así como la tabla de los límites. Además se utilizan dos resultados ya vistos (problemas 1 y 2 de la lección 4):

1º) El límite de la función $f(x)=k$ en x_0:

$$\lim_{x \to x_0} k = k$$

2º) El límite de la función $f(x)=x$ en x_0:

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

Veamos como ejemplo el límite de la función polinómica $f(x)=3x^2-8$ en 1:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(3x^2-8) \overset{1}{=} \lim_{x \to 1}(3x^2) - \lim_{x \to 1} 8 \overset{2}{=} 3 \cdot \lim_{x \to 1} x^2 - \lim_{x \to 1} 8 \overset{3}{=}$$

$$= 3 \cdot (\lim_{x \to 1} x)^2 - \lim_{x \to 1} 8 \overset{4}{=} 3 \cdot 1^2 - 8$$

Como se ve, todos estos pasos se reducen a sustituir x por 1, lo que se conoce con el nombre de *dar el paso al límite*. Eso es lo que haremos de ahora en adelante:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(3x^2-8) \overset{5}{=} 3 \cdot 1^2 - 8 = -5$$

A diferencia de lo que sucedía con los límites en el infinito, los límites de las funciones polinómicas en un punto están siempre determinados. Conviene, pues, que no confundas ambos tipos de límites. Sacar aquí factor común la máxima potencia de x carece de sentido y puede conducirnos a expresiones indeterminadas.

Veamos ahora cómo se resuelven algunas de las indeterminaciones que pueden aparecer.

---

[1] El límite de una resta es la resta de los límites (primera regla de las operaciones con límites).
[2] El límite del producto de un número por una función es el producto del número por el límite de la función (segunda regla de las operaciones con límites).
[3] El límite de un producto ($x^2=x \cdot x$) es el producto de los límites (tercera regla de las operaciones con límites).
[4] Por los resultados mencionados más arriba (los problemas 1 y 2 de la lección 4).
[5] Damos el paso al límite.

2.- Expresión indeterminada L≠0/0

Esta indeterminación solo se refiere al signo, ya que el límite, si existe, es $+\infty$ o $-\infty$.

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x}{(x-2)^2} \overset{1}{=} \frac{4}{0}$$

Para eliminarla, se estudia el signo del 0. El resultado final depende de los signos de numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x}{(x-2)^2} \overset{2}{=} \frac{4}{0^+} \overset{3}{=} +\infty$$

Si al estudiar el signo del cero observamos que depende de por dónde nos acerquemos al punto, si por la izquierda o por la derecha, calcularemos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x}{x-2} \overset{4}{=} \frac{4}{0}$$

Por tanto:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{2x}{x-2} \overset{5}{=} \frac{4}{0^-} \overset{6}{=} -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{2x}{x-2} \overset{7}{=} \frac{4}{0^+} \overset{3}{=} +\infty$$

Esto significa que no existe el límite de esta función en 2.

Otro ejemplo:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{x}{1-x}} \overset{8}{=} \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{x}{1-x}} \overset{1}{=} \left(\frac{1}{0^+}\right)^{\frac{1}{0^-}} = (+\infty)^{-\infty} \overset{9}{=} 0$$

3.- Expresión indeterminada 0/0

La indeterminación 0/0 se resuelve descomponiendo en factores el numerador y el denominador, y simplificando a continuación:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} \overset{10}{=} \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x} \overset{1}{=} \frac{6}{3} = 2$$

---

[1] Damos el paso al límite.
[2] Como $x\neq 2$ (recuerda la definición de límite), $(x-2)^2$ es siempre positivo.
[3] Por la regla de los signos: +/+=+.
[4] El signo del cero depende de si x es mayor o menor que 2.
[5] Como $x<2$ (recuerda la definición de límite lateral izquierdo), $x-2$ es negativo.
[6] Por la regla de los signos: +/-=-.
[7] Como $x>2$ (recuerda la definición de límite lateral derecho), $x-2$ es positivo.
[8] Como se trata de una función potencial-exponencial, la base debe ser positiva. Por tanto, solo tiene sentido el límite lateral derecho en 1, ya que su dominio es $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.
[9] Aplicamos la tabla de límites.
[10] Si diésemos aquí el paso al límite, aparecería la indeterminación 0/0. Por tanto, descomponemos en factores y simplificamos.

Otro ejemplo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x-3}-1}\overset{1}{=}\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)(\sqrt{x-3}+1)}{(\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x-3}+1)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)(\sqrt{x-3}+1)}{x-3-1}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x-3}+1)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\left[(x+4)(\sqrt{x-3}+1)\right]\overset{2}{=}8\cdot 2=16$$

4.- Algunos límites de funciones irracionales

Como se ha visto en la lección anterior y en esta, la transformación de los límites indeterminados en determinados consiste muchas veces en sustituir la función cuyo límite se pretende calcular por otra función distinta, pero con el mismo límite.

Pues bien, en los límites de funciones del tipo $\sqrt{f}/\sqrt{g}$ que den la indeterminación 0/0, conviene pasar a la función $\sqrt{f/g}$. Observa que el dominio de la primera función está contenido en el de la segunda, ya que la primera solo tiene sentido cuando f es no negativa y g es positiva, mientras que la segunda tiene sentido *además* cuando f y g son ambas negativas[3]. Veamos un ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-x}}\overset{4}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x(x-2)}}{\sqrt{x(x-1)}}$$

Para eliminar la expresión indeterminada 0/0 necesitamos simplificar el factor que se anula en el numerador y en el denominador, pero no podemos hacerlo porque entonces llegamos a una función en la que no tiene sentido plantear el límite que estamos calculando, ya que su dominio es $[2,+\infty)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$$

Al llegar aquí quizá pueda alguno empezar a dudar de lo que aprendió sobre las propiedades de las raíces:

$$\frac{\sqrt{x(x-2)}}{\sqrt{x(x-1)}}=\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$$

Pero estas propiedades no son ciertas cuando los radicandos son

---

[1] Si diésemos aquí el paso al límite, aparecería la indeterminación 0/0. Por tanto, descomponemos en factores y simplificamos. Esto se consigue multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador.
[2] Damos el paso al límite.
[3] Dicho de otro modo, la primera función es una restricción de la segunda.
[4] Si diésemos aquí el paso al límite, aparecería la indeterminación 0/0. Por tanto, descomponemos en factores.

negativos. Y aquí, x, x-2 y x-1 son los tres negativos, pues el dominio de la función de partida es $(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$; y, por tanto, el límite en 0 coincide con el límite lateral izquierdo.

El problema desaparece si procedemos como hemos indicado:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x(x-2)}}{\sqrt{x(x-1)}}\overset{1}{=}\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x(x-2)}{x(x-1)}}\overset{2}{=}\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\overset{3}{=}\sqrt{2}$$

Veamos otro ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\overset{4}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}\overset{5}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\overset{3}{=}1$$

Pero también en este caso funciona el método anterior:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}\overset{6}{=}\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x}{x(1-x)}}\overset{5}{=}\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1}{1-x}}\overset{3}{=}1$$

Por tanto, puede uno desentenderse de los dominios si en este tipo de problemas se aplica el procedimiento indicado.

Aunque se ha considerado aquí el caso particular de un cociente de raíces cuadradas, lo dicho vale también cuando se trata de un cociente de raíces de índice par cualquiera. Si las raíces son de índice impar, no es necesario aplicar lo dicho en este apartado, ya que entonces el radicando puede ser negativo. Sin embargo, también en este caso puede procederse de igual forma. Por último, si las raíces son de distinto índice, se reducen primero a índice común.

* * *

Por otro lado, dado que pueden aparecer raíces de índice cualquiera, hay que tener especial cuidado a la hora de sacar factores o divisores fuera de un signo radical (o de meterlos)[7]. Nos atendremos a la siguiente regla (fácil de ver):

$\sqrt[n]{f^n}$		n: Par	n: Impar
f	+	f	f
f	-	-f	f

---

[1] Pasamos a una función cuyo dominio es $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup[2,+\infty)$ y que coincide con la de partida en el dominio de esta.

[2] Después de simplificar la x, pasamos a otra función cuyo dominio es $(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$ y que vuelve a coincidir con la de partida en el dominio de esta.

[3] Damos el paso al límite.

[4] Como el dominio de la función de partida es $(0,1)$, las operaciones con radicales son aquí correctas, ya que los radicandos x y 1-x son positivos.

[5] Hemos pasado a una función cuyo dominio es $(-\infty,1)$, pero que se comporta como la de partida en el dominio de esta.

[6] Hemos pasado a una función cuyo dominio es $(-\infty,0)\cup(0,1)$, pero que se comporta como la de partida en el dominio de esta.

[7] Igual que nos sucedía en la lección anterior con algunos límites.

Veamos un ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}\overset{1}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x(x-2)}}{x}\overset{2}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt{x(x-2)}}{x}\overset{3}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt{x(x-2)}}{-\sqrt{x^2}}=$$

$$\overset{4}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(-\sqrt{\frac{x(x-2)}{x^2}}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(-\sqrt{\frac{x-2}{x}}\right)\overset{5}{=}-\sqrt{\frac{-2}{0^-}}=-\sqrt{+\infty}\overset{6}{=}-\infty$$

5.- Otras técnicas básicas para el cálculo de límites

Para el cálculo de ciertos límites se requiere conocer las gráficas de algunas funciones:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}\overset{7}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{x}\overset{5}{=}\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

* * *

En algunas ocasiones conviene hacer las operaciones que aparecen indicadas en la función antes de calcular el límite de esta:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1-x}{2-x}-\frac{2x}{x^2-4}\right)\overset{8}{=}\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-1}{x-2}-\frac{2x}{(x-2)(x+2)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x+2)-2x}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-x-2-2x}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)(x+2)}\overset{9}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2}\overset{5}{=}\frac{3}{4}$$

En otras ocasiones, sin embargo, no es necesario:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2-x}{1-x}-\frac{2x}{(x-2)^2}\right)\overset{5}{=}\frac{0}{1-2}-\frac{4}{0^+}=0-\infty=-\infty$$

6.- Problemas

1) Calcula los límites de las siguientes funciones en los puntos indicados (E(x) significa “parte entera de x”):

---

[1] Como sale la indeterminación 0/0, descomponemos en factores.
[2] Como el dominio de la función es $(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$, el límite coincide con el límite lateral izquierdo. Aunque es fácil el cálculo del dominio, puede sustituirse por el uso de la calculadora. Así, en este caso, vemos que el radicando sale negativo para x=0,1 y positivo para x=-0,1. Si fuese positivo por ambos lados, habría que calcular los dos límites laterales por separado.
[3] Ya que x<0 y el índice es par.
[4] Aplicamos el procedimiento que hemos indicado antes.
[5] Damos el paso al límite.
[6] Aplicamos la tabla de límites.
[7] Ya que el dominio de la función ln es $(0,+\infty)$.
[8] Antes de sacar denominador común, transformo la primera fracción algebraica multiplicando numerador y denominador por -1.
[9] Si diésemos aquí el paso al límite, aparecería la indeterminación 0/0. Por tanto, descomponemos en factores y simplificamos.

a) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<2\\ 3-x & \text{si } x\geq 2\end{cases}$ en $x=2$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & \text{si } x\leq 0\\ x & \text{si } x>0\end{cases}$ en $x=0$

c) $f(x)=\begin{cases}-1/x & \text{si } x<-1\\ 2x+3 & \text{si } x>-1\end{cases}$ en $x=-1$

d) $f(x)=\begin{cases}-x & \text{si } x\leq 0\\ -3x & \text{si } x>0\end{cases}$ en $x=0$

e) $f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<2\\ 2 & \text{si } x=2\\ -1/2 & \text{si } x>2\end{cases}$ en $x=2$

f) $f(x)=E(x)$ en $x=0$

2) Halla:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{1-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln x\cdot\left(2+\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)^{(x+3)/x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{3/x}$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-2x}{(x-2)^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{5}{(x-4)^2}-\dfrac{x}{x^2+16}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{3-x}-\dfrac{2}{9-x^2}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x}{x^2-9}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}x^{2+\cos(1/x)}$

k) $\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{1/(1+x)}$

l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$

m) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-27}}{\sqrt[3]{x^2+6x-27}}$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-2x+1}{x^3-x^2+x-1}$

o) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x^2-8x+12}}$

p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+3x^2}}{x}$

q) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

r) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+x-6}}$

s) $\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{1/x}+e^{2/x})$

t) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x^3-x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$

3) Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{ax^2+2x^2-3ax-6x}{ax^2-ax-6x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ $(a>0)$

4) Halla:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-ax}{x^2+ax-2a^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}$

h) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x^5-a^5}}{\sqrt{x^7-a^7}}$

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\ln x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\cos x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{1-\cos x}$

m) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

n) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}+1}{e^{\operatorname{tg} x}-1}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0}x^{2/(3-\ln x)}$

o) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x)^{1/x}$

p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+3x^2}}{x^3}$

q) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}{x-3}$

r) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}}$

s) $\lim\limits_{x\to 0}\log_{1/2} x$

t) $\lim\limits_{x\to 1}x^{1/(1-x)}$

5) Calcula el límite en 0 y en 1 de la función $f(x)=\log_x 2^x$.